CONCOURS 1999 POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES

TITULAIRES DE L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

\- OPTION MATHEMATIQUES -

TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée 2 heures

Ce sujet comporte 3 pages. Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement. Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Dans tout le problème, A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n. On suppose que les coefficients de A sont positifs. Le but du problème est d'étudier les propriétés de l'ensemble des valeurs propres de A dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ sera muni de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$. La matrice A sera dite **réductible** s'il existe un sous espace de dimension $p < n$, engendré par une sous famille des vecteurs $\{e_1, ..., e_n\}$ qui soit stable par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A.

Questions préliminaires

1 - Si A est réductible, montrer qu'il existe une matrice de permutation $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = T\tilde{A}T^{-1}$ où $\tilde{A}$ est de la forme

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées.

2 - Montrer que s'il existe un entier naturel $p \geq 1$ tel que la matrice A^p soit à coefficients strictement positifs, alors A n'est pas réductible.

On suppose dans toute la suite du problème que la matrice A n'est pas réductible.

3 - Soit x un vecteur non nul dont toutes les coordonnées sont positives ou nulles, et p le nombre de ses coordonnées non nulles. Montrer que si A est irréductible et à coefficients positifs, alors $(Id + A)x$ a au moins $p + 1$ coordonnées non nulles, où Id désigne la matrice identité d'ordre n. En déduire que la matrice $(Id + A)^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

Problème

Soit Δ l'ensemble des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ ayant toutes leurs coordonnées positives. Pour tout vecteur $x \in \Delta$, on associe

$$r(x) = \min \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \text{ pour } i = 1, ..., n \text{ tel que } x_i > 0 \right\}$$

1 - Montrer que la fonction r est bien définie sur Δ et que pour tout $x \in \Delta$ le vecteur $Ax - r(x)x$ a toutes ses coordonnées positives.

2 - Soit $x \in \Delta$ et $y = (Id + A)^{n-1}x$. Montrer que $r(x) \leq r(y)$.

3 - On considère les ensembles M et N définis par

$$M = \{x \in \Delta \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$

$$N = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } : \exists x \in M,\ y = (Id + A)^{n-1}x\}$$

Montrer que N est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et que la fonction r est continue sur N.

4 - Montrer qu'il existe un vecteur $z \in N$ tel que $r(y) \leq r(z)$, $\forall y \in N$.

Dans la suite, on notera $\tilde{r} = r(z)$.

5 - Montrer que $\forall x \in \Delta$, $r(x) \leq \tilde{r}$ et que $\tilde{r} > 0$.

6 - Montrer que $\tilde{r}$ est une valeur propre de A et que z est un vecteur propre associé à $\tilde{r}$.

7 - Soit $y \in \Delta$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\tilde{r}$. Montrer que les coordonnées de y sont strictement positives.

8 - Soit α une valeur propre de A dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ et $y \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à α. y^+ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^n$ ayant pour $i$ème coordonnée $\mid y_i \mid$, y_i étant la $i$ème coordonnée de y. Montrer que $Ay^+ - \mid \alpha \mid y^+$ est un vecteur de Δ. En déduire que $\mid \alpha \mid \leq \tilde{r}$.

9 - Montrer que si y est un vecteur propre de A associé à $\tilde{r}$, alors y^+ est aussi un vecteur propre de A associé à $\tilde{r}$. Déduire que y n'a aucune coordonnée nulle.

10 - En déduire que le sous espace propre de $\mathbb{C}^n$ associé à $\tilde{r}$ est de dimension 1.

Application numérique

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

1 - La matrice A est elle réductible ?

2 - Soit $x = (x_1, x_2)$ un vecteur à coordonnées strictement positives ; on pose $\alpha = x_2/x_1$. Déterminer explicitement la valeur de $r(x)$ en fonction de α.

3 - En déduire la valeur de $\tilde{r}$ associée à A et un vecteur propre associé à $\tilde{r}$.

4 - On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1/6 & 1 \\ 1/7 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que B^n ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.